

مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک

فصل ۱۱

ارزش‌گذاری اختیار معامله: مدل بلک-شولز

فرض «گشت تصادفی» قیمت‌ها در مدل بلک-شولز

- سهمی را در نظر بگیرید که قیمت آن s است.
- در یک فاصله زمانی کوتاه dt ، تغییرات قیمت سهم را می‌توان به صورت یک توزیع نرمال در نظر گرفت که میانگین آن $\mu S dt$ و انحراف معیار آن به صورت ذیل خواهد بود:

$$\sigma S \sqrt{\delta t}$$

- در واقع μ بازده مورد انتظار و σ نوسان‌پذیری سهام را نشان می‌دهد.

ویژگی لگاریتم نرمال

می توان نشان داد که لگاریتم قیمت سهام دارای توزیع نرمال است که دارای میانگین:

$$\text{میانگین} = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$$

و انحراف معیار: $\sigma\sqrt{T}$ می باشد.

چونکه لگاریتم S_T ، نرمال است، لذا S_T دارای توزیع لگاریتم نرمال می باشد.

ویژگی لگاریتم نرمال (ادامه)

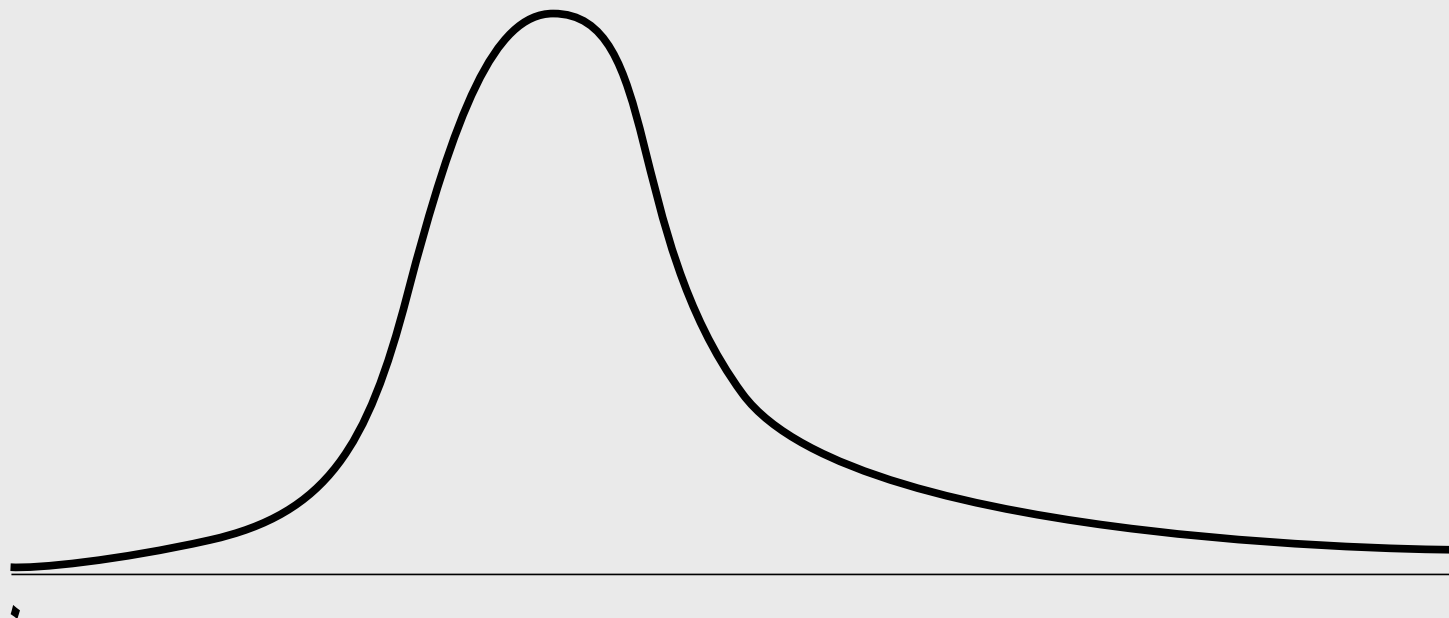
$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

or

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ می باشد.

توزیع لگاریتم نرمال



$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

بازده مورد انتظار

- ارزش مورد انتظار قیمت سهام برابر با $S \cdot e^{\mu T}$ است.
- بازده مورد انتظار سهم با نرخ بهره مرکب پیوسته، برابر با $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ است.
- میانگین حسابی بازده‌ها، در طول دوره‌های زمانی کوتاه مدت δt برابر با μ است.
- میانگین هندسی این بازده‌ها، نیز برابر با $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ است.

نوسان پذیری

□ نوسان پذیری قیمت یک سهام را می توان به صورت انحراف معیار بازده کسب شده توسط سهم در طول یک سال تعریف کرد، به طوری که بازده به صورت مرکب پیوسته محاسبه شده باشد.

□ انحراف معیار بازده سهام در بازه زمانی δt برابر است با:

$$\sigma \sqrt{\delta t}$$

اگر قیمت سهمی ۵۰ دلار و نوسان پذیری آن ۲۵٪ در سال باشد، انحراف معیار تغییرات قیمت سهام در یک روز چقدر است؟

تخمین نوسان پذیری با استفاده از داده‌های تاریخی

۱. قیمت‌های سهام، یعنی S_0, S_1, \dots, S_n را در فاصله‌های زمانی τ سال بررسی کنید.

۲. بازده مرکب پیوسته را به صورت زیر تعریف نمایید.

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$$

۳. انحراف معیار قیمت‌های سهام را محاسبه نمایید.

۴. برآورد نوسان پذیری تاریخی به شرح ذیل می‌باشد.

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\tau}}$$

مفاهیم مدل بلک-شولز

- قیمت اختیار و قیمت سهام به منبع عدم اطمینان یکسانی بستگی دارد.
- می توان با تشکیل بدهای شامل سهام و اختیارات این منبع عدم اطمینان را حذف نمود.
- بنابراین بده مذکور بدون ریسک بوده و می باید دارای بازدهی نرخ بدون ریسک باشد.

فرمول‌های بلک-شولز

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

where:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

تابع $N(x)$

- $N(x)$ ، احتمال اینکه یک متغیر با توزیع نرمال استاندارد شده، (میانگین صفر و انحراف معیار ۱)، کمتر از x باشد.
- برای محاسبه آن، جداولی در پایان کتاب آورده شده است.

ویژگی های فرمول بلک-شولز

□ با بزرگتر شدن S ، متغیر c تقریباً معادل $S - Ke^{-rT}$ و متغیر p معادل صفر می شود.

هر چقدر که S کوچکتر شود، مقدار c به سمت صفر و مقدار p به Ke^{-rT} نزدیک می شود.

ارزش‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک

- متغیر μ در رابطه بلک-شولز وجود ندارد.
- در واقع معادله بلک-شولز مستقل از کلیه متغیرهایی است که تحت تأثیر ترجیحات ریسک است.
- این رابطه با مفهوم ارزش‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک سازگار است.

کاربرد ارزش گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک

۱. فرض کنید بازده مورد انتظار یک دارایی، برابر با نرخ بهره بدون ریسک است.
۲. عایدی‌های مورد انتظار اوراق مشتقه را محاسبه نمایید.
۳. با نرخ بهره بدون ریسک تنزیل نمایید.

ارزش گذاری پیمان آتی با توجه به اصل ارزش گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک

□ عایدی قرارداد برابر است با: $S_T - K$

□ عایدی مورد انتظار در دنیای بی تفاوت نسبت به ریسک برابر است با:

$$Se^{rT} - K$$

□ ارزش فعلی عایدی های مورد انتظار برابر است با:

$$e^{-rT} (Se^{rT} - K) = S - Ke^{-rT}$$

نوسان پذیری ضمنی

- نوسان پذیری ضمنی یک اختیار معامله، عبارت است از مقدار نوسان پذیری که با قرار دادن در مدل بلک-شولز قیمت بازاری اختیار معامله بدست می آید.
- یک تناظر یک به یک بین قیمت‌ها و نوسان پذیری‌های ضمنی وجود دارد.
- معامله‌گران و کارگزاران اغلب بجای قیمت‌های دلاری اختیارات، نوسان پذیری‌های ضمنی اختیارات را اعلام می کنند.
- فعالان بازار از عبارت‌هایی همچون بالا یا پایین بودن سطح premium اختیار یاد می کنند، premium یعنی قیمت اختیار با توجه به دارایی پایه آن. به عبارت دقیق تر premium همان نوسان پذیری سهم را نشان می دهد.

ماهیت نوسان پذیری

- معمولاً هنگامی که بازار باز است (دارایی معامله می شود)، نوسان پذیری در مقایسه با زمانی که بازار بسته است، نسبتاً بیشتر است.
- به همین جهت هنگام ارزش گذاری اختیارات، مبنای محاسبه زمان، بجای (روزهای تقویم)، (روزهای کاری) است.

سود نقدی

- اختیارات اروپایی صادره بر سهامی که سود نمی پردازد، را می توان با کم کردن ارزش فعلی سودهای پرداختی از قیمت سهام، در مدل بلک-شولز قیمت گذاری نمود.
- تنها سودهای قبل از تاریخ استحقاقی سود، در طول عمر اختیار می باید در مدل مورد محاسبه قرار می گیرند.
- کاهش مورد انتظار در قیمت انتظاری سهام باید برابر با (سود نقدی) باشد.

اختیارات آمریکایی

□ یک اختیار خرید آمریکایی صادره بر سهامی که سود نقدی نمی پردازد، هرگز نباید زودتر از موعد سرسید، اعمال شود.

□ یک اختیار خرید آمریکایی صادره بر سهامی که سود نقدی می پردازد، فقط باید زودتر از تاریخ استحقاق سود قبلی (ex-dividend date)، اعمال شود.

رویکرد بلک در مواجهه با سود نقدی در اختیار خرید آمریکایی

قیمت اختیار آمریکایی را برابر با حداکثر مقدار یکی از دو گزینه زیر قرار دهید:

۱. قیمت اختیار اروپایی که سررسید آن مشابه سررسید اختیار معامله آمریکایی است.
۲. قیمت اختیار معامله‌ای که سررسید آن قبل از آخرین تاریخ استحقاق سود قبلی سهام می‌باشد.

پایان فصل ۱۱