

# مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک

# فصل ۱۷

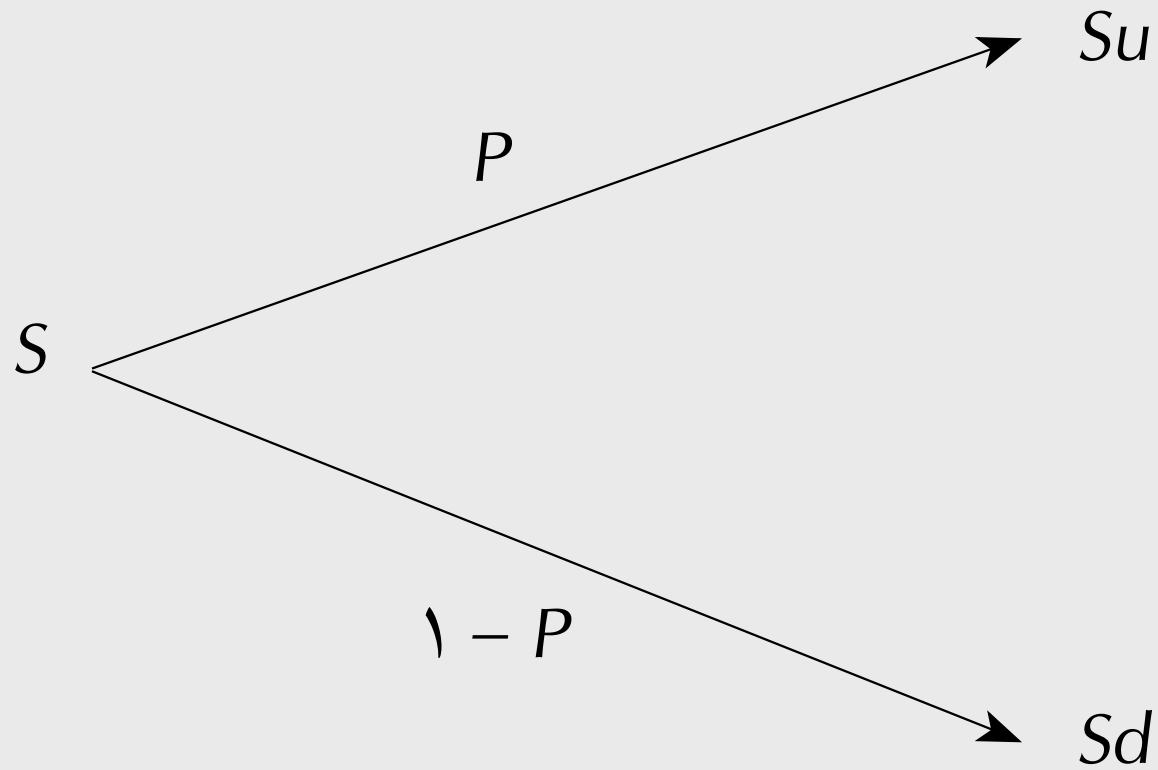
## ارزش‌گذاری با استفاده از مدل درخت دوجمله‌ای

# درخت دوجمله‌ای

□ مدل درخت دوجمله‌ای، یک راه‌حل تقریبی برای تغییرات قیمت سهام و سایر دارایی‌ها است.

□ در هر دوره زمانی فرض می‌شود که قیمت سهام یا یک حرکت رو به بالا و یا یک حرکت رو به پایین خواهد داشت.

# تغییرات با گذشت زمان



# ارزش گذاری تحت شرایط بی تفاوتی نسبت به ریسک

ما پارامترهای مدل یعنی  $p$ ،  $u$ ،  $d$  و بقیه پارامترها را طوری انتخاب می کنیم که قیمت های درست و صحیحی برای میانگین و انحراف معیار تغییرات قیمت سهام در دنیای بی تفاوت نسبت به ریسک به ما ارائه نماید.

# پارامترهای درخت دو جمله‌ای برای سهامی که سود نمی‌پردازد

ما پارامترهای مدل یعنی  $p$ ،  $u$ ،  $d$  و بقیه پارامترها را طوری انتخاب می‌کنیم که قیمت‌های درست و صحیحی برای میانگین و انحراف معیار تغییرات قیمت سهام در دنیای بی تفاوت نسبت به ریسک به ما ارائه نماید.

$$e^{r\delta t} = pu + (1 - p)d$$

$$\sigma^2 \delta t = pu^2 + (1 - p)d^2 - [pu + (1 - p)d]^2$$

□ یک شرطی که اغلب مواقع بکار می‌رود، این است که:

$$u = \frac{1}{d}$$

# مدل دوجمله‌ای برای سهامی که سود نمی‌پردازند

هنگامی که مقدار  $\delta t$  کوچک است، داریم:

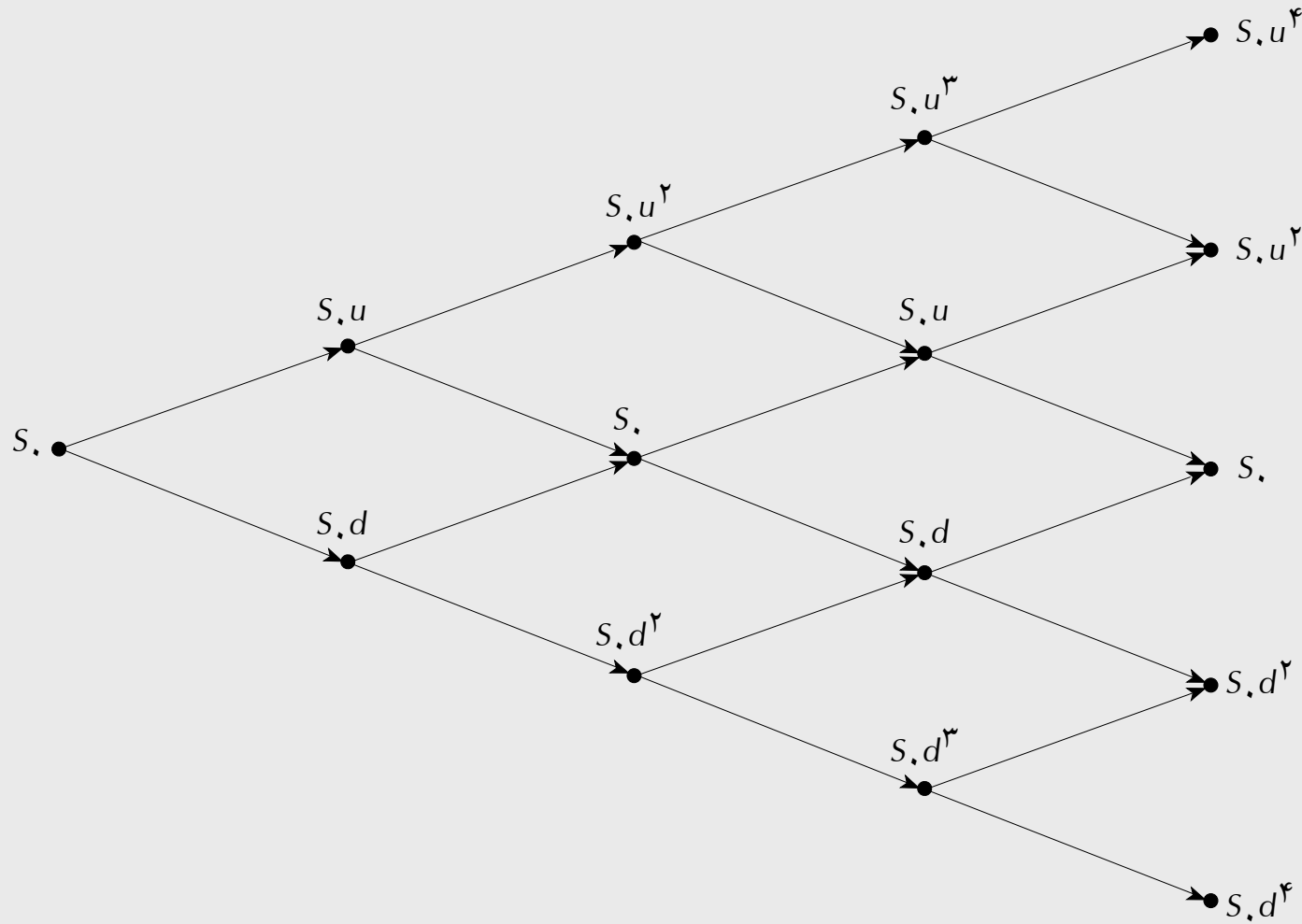
$$u = e^{\sigma \sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\delta t}}$$

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

$$a = e^{r \delta t}$$

# درخت کامل



# حرکت عقب‌گرد روی درخت

- ارزش اختیار معامله در آخرین گره برای ما معلوم است.
- با حرکت عقب‌گرد روی درخت با استفاده از اصل بی‌تفاوت نسبت به ریسک، ارزش اختیار را در هر گره محاسبه می‌کنیم. همچنین در هر گره تست می‌کنیم که آیا اعمال زودتر از موعد سررسید بهینه است یا نه.

# مثال: اختیار فروش

$$S_0 = 50, \quad K = 50, \quad r = 10\%, \quad \sigma = 40\%$$

$$T = 5 \text{ month} = 0.4167$$

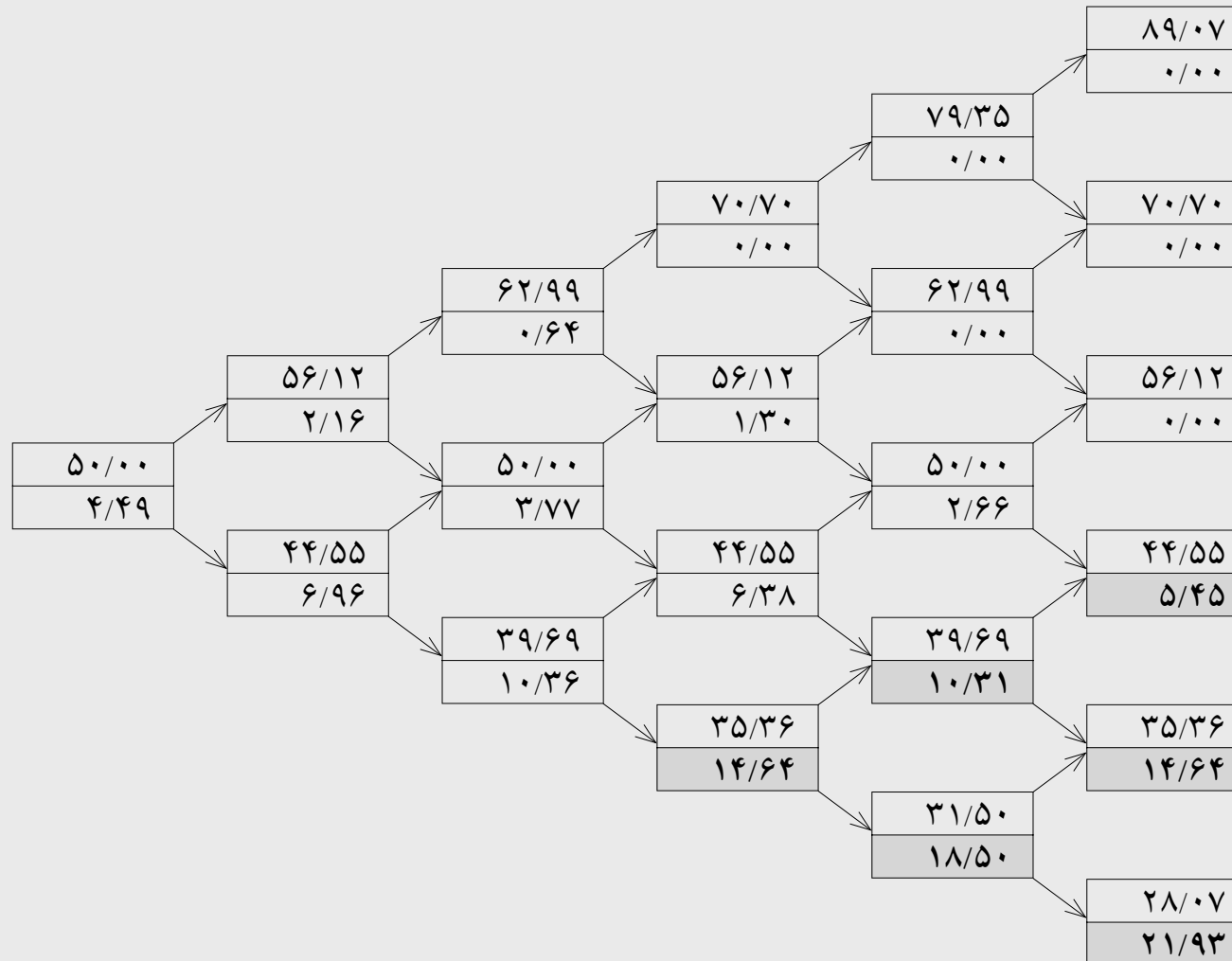
$$\delta t = 5 \text{ month} = 0.0833$$

The parameters imply

$$u = 1.1224, \quad d = 0.8909$$

$$a = 1.0084, \quad p = 0.5073$$

# مثال (ادامه)



# محاسبه دلتا

دلتا را از گره‌ها در زمان  $\Delta t$  محاسبه می‌نماییم.

$$\text{Delta} = \frac{2/16 - 6/96}{56/12 - 44/55} = -0/41$$

# محاسبه گاما

گاما را در گره‌ها در زمان  $2\Delta t$  محاسبه می‌نماییم.

$$\Delta_1 = \frac{(0/64 - 3/77)}{(62/99 - 50)} = -0/24, \quad \Delta_2 = \frac{(3/77 - 10/36)}{(50 - 39/69)} = -0/64$$

$$\text{Gamma} = \frac{\left[ \frac{(0/64 - 3/77)}{(62/99 - 50)} \right] - \left[ \frac{(3/77 - 10/36)}{(50 - 39/69)} \right]}{11/65} = 0/03$$

# محاسبه تتا

تتا را از گره مرکزی در زمان صفر و  $2\delta t$  محاسبه می کنیم.

$$\text{Gamma} = \frac{3/77 - 4/49}{0.1667} = -4/3$$

or  $-0.012$  per calendar day

# محاسبه وگا

□ به ترتیب زیر

□ یک درخت جدید با نوسان پذیری ۴۱٪ بجای ۴۰٪ ترسیم نمایید.

□ ارزش اختیار برابر با ۴/۶۲ است.

□ وگا برابر است با:

$$۴/۶۲ - ۴/۴۹ = ۰/۱۳$$

با ۱٪ تغییر در نوسان پذیری

# درخت‌ها و بازده نقدی

□ هنگامی که قیمت سهام با نرخ بازده نقدی پیوسته  $q$  سود می‌پردازد، می‌توانیم درخت دوجمله‌ای را به همان شیوه گفته شده رسم نمایم ولیکن باید:

$$a = e^{(r - q)\delta t}$$

از مدل بلک-شولز داریم:

برای اختیارات شاخص سهام،  $q$  برابر با نرخ بازدهی نقدی شاخص است.

برای اختیارات ارز خارجی،  $q$  برابر با نرخ بهره بدون ریسک خارجی است.

برای اختیارات قراردادهای آتی  $q = r$

# مدل درخت دوجمله‌ای برای سهمی که سود می‌پردازد

□ روش‌ها:

– درخت را برای قیمت سهامی منهای ارزش فعلی سودهای پرداختی رسم نمایید.

– با افزودن ارزش فعلی سودهای نقدی در هر گره یک درخت جدید رسم نمایید.

□ این فرایند تضمین می‌نماید که درخت در هر گره تعدیل مجدد شده و همان مفروضات مدل بلک-شولز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

# گسترش شیوه درخت دو جمله‌ای

- الف) نرخ‌های بهره متغیر (وابسته به زمان)
- تکنیک کنترل نوسان

# رویه‌های دیگر برای بنا نهادن درخت دو جمله‌ای

بجای اینکه  $u = \frac{1}{d}$  قرار دهیم، می‌توانیم هر دو احتمال را  $0.5$  قرار می‌دهیم.

$$u = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$$

# شبه‌سازی مونت کارلو

□ همین که درخت دو جمله‌ای برای یک اوراق مشتقه‌ای بنا نهاده شد، ما به طور تصادفی مسیرهایی را روی آن به صورت نمونه‌ای انتخاب می‌کنیم بجای حرکت عقب‌گرد که از انتهای درخت آغاز و به سمت عقب امتداد می‌یافت، در اینجا ما از حرکت رو به جلو در روی درخت استفاده می‌کنیم.

□ ارزش مشتقات برابر است با میانگین ارزش فعلی پرداخت‌ها.

# پایان فصل ۱۷