

# مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک

# فصل ۱۸

## اختیارات نرخ بهره

# مبادله اختیارات نرخ بهره در بورس

- اختیارات صادره بر قراردادهای آتی اوراق خزانه (CBOT)
- اختیارات قراردادهای آتی یورودلار

# اوراق قرضه با اختیارات نهفته

- اوراق قرضه قابل بازخرید: شرکت منتشر کننده آن حق یا اختیار بازخرید این اوراق قرضه را با یک قیمت از پیش تعیین شده دارد. این قیمت ممکن است به صورت تابعی از زمان باشد.
- اوراق قرضه قابل فروش: این امکان را برای دارنده آن فراهم می آورد که تقاضای بازخرید آن را با قیمت از پیش تعیین شده و در دوره زمانی مشخص در آینده بنماید.

# مدل بلک و تميم آن

- تميم مدل بلک-شولز که به طور گسترده در حوزه نرخ بهره کاربرد دارد، به مدل بلک معروف گشته است.
- اين مدل فرض می کند که ارزش نرخ بهره، قیمت اوراق قرضه، یا سایر متغیرهای در دوره زمانی معین  $T$  در آینده دارای توزیع لگاریتم نرمال هستند.

# مدل بلک و تجمیم آن (ادامه)

□ میانگین توزیع احتمال، ارزش پیمان آتی متغیر است.

□ انحراف معیار توزیع احتمال لگاریتم متغیر عبارت است از:

$$\sigma \sqrt{T}$$

□ که  $\sigma$  نوسان پذیری را نشان می دهد.

□ عایدی مورد انتظار که با نرخ سررسید  $T$  تنزیل شده است، امروز ملاحظه شده است.

# مدل بلک

$$c = e^{-rT} [F, N(d_1) - R_X N(d_2)]$$

$$p = e^{-rT} [R_X N(-d_2) - F, N(-d_1)]$$

$$d_2 = \frac{\ln \left( \frac{F,}{R_X} \right) - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$T$ : سررسید اختیار

$R_X$ : قیمت توافقی

$r$ : عایدی قرضه با کوپن صفر برای سررسید  $T$

$F,$ : ارزش پیمان آتی متغی

$\sigma$ : نوسان پذیری

# مدل بلک: عایدی پس از مشاهده متغیر

$$c = e^{-r^*T^*} [F, N(d_1) - R_X N(d_2)]$$

$$p = e^{-r^*T^*} [R_X N(-d_2) - F, N(-d_1)]$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F,}{R_X}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$T$ : زمانی که متغیر مشاهده می‌شود       $T^*$ : زمان پرداخت

$R_X$ : قیمت توافقی

$r^*$ : عایدی قرضه با کوپن صفر برای سررسید  $T$

$F,$ : ارزش پیمان آتی متغیر       $\sigma$ : نوسان پذیری

# اختیارات اروپایی اوراق قرضه

□ هنگام قیمت گذاری اختیارات اروپایی صادره بر اوراق قرضه، معمولاً فرض بر این است که قیمت آتی اوراق قرضه دارای توزیع لگاریتم نرمال است.

# اختیارات اروپایی اوراق قرضه (ادامه)

$$c = e^{-rT} [F, N(d_1) - R_X N(d_2)]$$

$$p = e^{-rT} [R_X N(-d_2) - F, N(-d_1)]$$

$$d_2 = \frac{\ln \left( \frac{F,}{R_X} \right) - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$T$ : عمر اختیار معامله

$R_X$ : قیمت توافقی

$r$ : نرخ بهره تا زمان سررسید  $T$

$F,$ : ارزش پیمان آتی متغیر

$\sigma$ : نوسان پذیری قیمت

# نوسان‌پذیری عایدی در مقابل نوسان‌پذیری قیمت

بین تغییر قیمت پیمان آتی اوراق قرضه و تغییر عایدی پیمان آتی اوراق قرضه، رابطه‌ای به صورت ذیل برقرار است:

$$\frac{\delta F}{F} \approx -D \delta y_F \quad \text{or} \quad \frac{\delta F}{F} \approx -D y_F \frac{\delta y_F}{y_F}$$

که در رابطه مذکور،  $D$  دیرش تعدیل یافته پیمان آتی اوراق قرضه در زمان سررسید اختیار است.

# نوسان‌پذیری عایدی در مقابل نوسان‌پذیری قیمت (ادامه)

□ رابطه مزبور، تقریباً منجر به نتیجه‌گیری ذیل می‌شود:

$$\sigma = D_y, \sigma_y$$

که  $\sigma_y$  نوسان‌پذیری عایدی و  $\sigma$  نوسان‌پذیری قیمت است.

# Caplet

□ Caplet برای تضمین در مقابل افزایش نرخ لایبور بالاتر از سطح معین، در دوره زمانی معین بکار می‌رود.

□ فرض کنید که  $R_X$  نرخ بهره،  $L$  مبلغ اسمی و نرخ لایبور واقعی در دوره زمانی بین  $t$  و  $t + \delta_k$  است. عایدی قرارداد در زمان  $t + \delta_k$  برابر است با:

$$L\delta_k \max (R_k - R_X, 0)$$

# Caps

- یک بهره شامل caplets را گویند.
- هر caplet را می‌توان به عنوان یک اختیار خرید صادره بر قرارداد آتی نرخ بهره است که این اختیار در صورتی دارای بازدهی خواهد بود که نرخ‌های بهره در زمان سررسید قرارداد بیشتر از نرخ توافقی  $R_X$  باشد.
- هنگام استفاده از مدل بلک فرض بر این است که نرخ بهره دارای توزیع لگاریتم نرمال است.

# مدل بلک برای Caps

ارزش caplet برای دوره زمانی  $[t_k, t_{k+1}]$  □

$$L\delta_k e^{-r_{k+1} t_{k+1}} [F_k N(d_1) - R_X N(d_2)]$$

Where:

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_X) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

$F_k$ : forward interest rate for  $(t_k, t_{k+1})$

$\sigma_k$ : interest rate volatility

$r_k$ : interest rate for maturity  $t_k$

$L$ : principal

$R_X$ : cap rate

$$\delta_k = t_{k+1} - t_k$$

# هنگام استفاده از مدل بلک برای Caps باید ...

□ می توان از نوسان پذیری های یکسان (پیمان آتی) یا نوسان پذیری متفاوت (نوسان پذیری نقدی) استفاده نمود.

یا:

□ نوسان پذیری های تخت و یا نوسان پذیری های یکسانی برای هر caplet استفاده نمود که با توجه به عمر باقیمانده cap متغیر خواهد بود.

# اختیارات اروپایی سوآپ

- سوآپش به دارنده آن، حق ورود در یک سوآپ نرخ بهره مشخص شده در یک زمان معین در آینده را ارائه می دهد.
- این قراردادها ممکن است به صورت حق پرداخت به نرخ بهره ثابت یا متغیر باشد.

# سوآپشن‌های اروپایی

□ هنگام ارزش‌گذاری سوآپ‌های اروپایی، روش معمول آن است که فرض کنیم نرخ‌های سوآپ دارای توزیع لگاریتم نرمال است.

□ سوآپشنی را در نظر بگیرید که این حق را به دارنده آن می‌دهد که به نرخ  $R_X$  به مدت  $n$  سال از زمان شروع سوآپ در زمان  $T$  پرداخت نماید. عایدی در هر تاریخ پرداخت سوآپ برابر است با:

$$\frac{L}{m} \max(R - R_X, 0)$$

که  $L$  مبلغ اسمی،  $m$  دفعات پرداخت و  $R$  نرخ بازار سوآپ در زمان  $T$  است.

# سوآپشن‌های اروپایی

ارزش سوآپشن برابر است با:

$$LA [F, N(d_1) - R_X N(d_2)]$$

Where:

$$d_2 = \frac{\ln \left( \frac{F}{R_X} \right) - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$F$ : نرخ پیمان آتی سوآپ است.  $\sigma$  نرخ نوسان‌پذیری سوآپ است و  $t_i$  مدت زمان باقیمانده تا  $i$  امین پرداخت سوآپ است و

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} e^{-r_i t_i}$$

# رابطه بین سوآپشن و اختیارات اوراق قرضه

- سوآپ نرخ بهره را می توان به صورت مبادله اوراق قرضه با نرخ بهره ثابت با اوراق قرضه نرخ متغیر دانست.
- یک سوآپشن یا اختیار سوآپ عبارت است از اختیار مبادله اوراق قرضه با نرخ بهره ثابت برای اوراق قرضه با نرخ بهره متغیر.

# رابطه بین سوآپشن و اختیارات اوراق قرضه (ادامه)

- در زمان شروع سوآپ، اوراق قرضه با نرخ بهره متغیر دارای ارزش اسمی است بنابراین سوآپشن را می توان اختیار مبادله اوراق قرضه با نرخ بهره ثابت با ارزش اسمی در نظر گرفت.
- اختیار صادره بر سوآپ هنگامی که نرخ بهره ثابت پرداخت و نرخ بهره متغیر دریافت می شود، در واقع به مثابه اختیار فروش صادره بر اوراق قرضه با قیمت توافقی ارزش اسمی اوراق قرضه است.
- هنگامی که نرخ متغیر پرداخت و نرخ ثابت دریافت می شود، در واقع به مثابه اختیار خرید صادره بر اوراق قرضه با قیمت توافقی ارزش اسمی اوراق قرضه است.

# ساختار زمانی مدل‌ها

- اختیارات آمریکایی و سایر مشتقات پیچیده نرخ بهره را می‌بایست بر اساس مدل نرخ بهره ارزش‌گذاری کرد.
- مدل ساختار نرخ بهره بیان می‌کند که تغییرات منحنی صفر در طول زمان چگونه است.
- نرخ‌های بهره کوتاه مدت (بازگشت به میانگین) را نشان می‌دهند.

# پایان فصل ۱۸