فصل دهم

مقدمه‌ای بر مدل درخت دوجمله‌ای

فصـل دهـم

مدل درخت دوجمله‌ای یک تکنیــک مفید و متداول برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است. این مدل به صورت یک دیاگرام است که مسیرهای مختلفی را که احتمال دارد، سهام در طی عمر اختیار معامله طی کند، نشان می‌دهد.

در این فصل ابتدا مدل‌های درخت دوجمله‌ای را بررسی می‌کنیم و سپس بــه بحث ارزش‌گذاری، تحت شــرایط بی‌تفاوتی نســبت به ریســک خواهیم پرداخت. شــیوه بحث مطالب، مشــابه مقاله مهم کاکس، راس و رابینســتین[۱] می‌باشد که در سال ۱۹۷۹ منتشر شد.

در ایــن فصل ما به کلیــات می‌پردازیم. بحث طرح جزئیات اســتفاده از رویه‌هــای ریاضی، با اســتفاده از درخــت دوجمله‌ای را به فصــل ۱۷ موکول می‌کنیم.

---

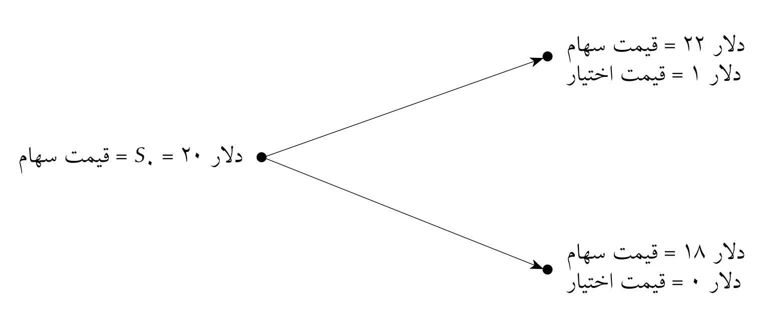
۱) Cox, Ross, Rubinstein

۱-۱۰) مدل دوجمله‌ای یک دوره‌ای[1]

بحث را با یک حالت خیلی ساده شروع می‌کنیم: فرض کنید قیمت سهمی در حال حاضر ۲۰ دلار است و یقین داریم که پس از یک ماه دیگر قیمت آن ۲۲ دلار یا ۱۸ دلار خواهد شد. می‌خواهیم ارزش یک اختیار خرید اروپایی را حساب کنیم که طبق آن، دارنده می‌تواند سهم مورد بحث را ظرف مدت سه ماه به قیمت ۲۱ دلار بخرد. چون می‌دانیم که قیمت سهم ۲۲ دلار یا ۱۸ دلار خواهد شد، پس در مورد ارزش اختیار معامله هم دو احتمال وجود خواهد داشت. اگر قیمت سهم به ۲۲ دلار برسد، اختیار خرید مزبور به اندازهٔ یک دلار ارزش خواهد داشت و چنانچه قیمت سهام مزبور به ۱۸ دلار تنزل یابد، اختیار معامله مزبور، صفر دلار ارزش خواهد داشت. نمودار (۱-۱۰)، این وضعیت را ترسیم می‌کند.

در این مثال فقط کافی است فرض کنیم هیچ فرصت آربیتراژی وجود ندارد. اکنون ما بدره‌ای از سهام و اختیار معامله تشکیل می‌دهیم، به طوری که در مورد ارزش بدرهٔ موردنظر در پایان سه ماه، ابهامی وجود نداشته باشد. در این حالت چون بدرهٔ ما بدون ریسک است، می‌بایستی نرخ بازده بدون ریسک را برای دارنده آن به ارمغان آورد؛ لذا ما می‌توانیم هزینه ایجاد بدره را محاسبه کنیم و در نتیجه قیمت اختیار معامله را بدست

شکل ۱-۱۰: تغییرات قیمت سهام در یک نمودار درخت دوجمله‌ای



1) A One-Step Binomial model

آوریـــم. چـــون در این حالت ما دو ورقه اوراق بهادار (ســـهم و اختیـــار معامله) داریم که ارزش آن می‌تواند تنها یکی از دو حالت را به خود بگیرد، لذا می‌توانیم همیشه بدرهٔ بدون ریسک تشکیل دهیم.

یک بدره را در نظر بگیرید که شـــامل تعداد Δ ســـهم از ســـهام مزبور برای موقعیت خریـــد و یک اختیار خرید برای موقعیت فروش می‌باشـــد. مـــا ارزش Δ را که بدرهٔ بدون ریسک تشکیل می‌دهد، محاسبه می‌کنیم. در صورتی که قیمت سهم افزایش یابد و به ۲۲ دلار برســـد، ارزش ســـهام ۲۲ دلار و ارزش اختیار معامله یک دلار می‌شود؛ یعنی ارزش کل بدرهٔ مزبور $۲۲\Delta - ۱$ خواهد شد. در صورتی که قیمت سهم کاهش یابد و به ۱۸ دلار برسد، ارزش سهام به ۱۸Δ و ارزش اختیار معامله صفر خواهد شد و در نتیجه ارزش کل بدرهٔ مزبور ۱۸Δ خواهد شد.

اگـــر Δ را طوری انتخـــاب کنیم که هر دو مقدار مزبور برابر شـــوند، بدرهٔ موردنظر بدون ریسک است؛ یعنی ارزش نهایی بدره برای هر دو حالت ذکر شده، یکســـان خواهـــد بـــود.

$$۲۲\Delta - ۱ = ۱۸\Delta$$

$$\Delta = ۰/۲۵$$

در نتیجه یک بدرهٔ بدون ریسک عبارت خواهد بود از:

خرید: ۰/۲۵ سهام

فروش: ۱ اختیار معامله

اگر بعد از ســـه ماه قیمت ســـهم فـــوق به ۲۲ دلار افزایش یابـــد، ارزش بدرهٔ مذکور برابر می‌شود با:

$$۲۲ \times ۰/۲۵ - ۱ = ۴/۵$$

و برعکس، اگر بعد از ســـه ماه قیمت ســـهم مزبور به ۱۸ دلار کاهـــش یابد، ارزش بدره برابر خواهد شد با:

$$۱۸ \times ۰/۲۵ = ۴/۵$$

بدون توجه به اینکه قیمت سهم افزایش یا کاهش پیدا می‌کند، ارزش بدره، در پایان عمر

اختیار معامله، برابر با ۴/۵ دلار خواهد بود.

بدرهٔ بدون ریسک در حالت عدم وجود فرصت‌های آربیتراژی می‌باید نرخ بازده بدون ریسک را برای دارندهٔ آن به ارمغان بیاورد. فرض کنید، در مثال بالا نرخ بهره بدون ریسک، سالیانه ۱۲٪ باشد. بدین ترتیب برای محاسبه ارزش امروز بدره، می‌بایست ارزش فعلی ۴/۵ دلار را حساب کنیم:

$$۴/۵\, e^{-۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}} = ۴/۳۶۷$$

می‌دانیم قیمت سهم مذکور در حال حاضر ۲۰ دلار است. اگر قیمت اختیار معامله را با f نشان دهیم، ارزش پرتفولیوی مزبور در حال حاضر عبارت است از:

$$۲۰ \times ۰/۲۵ - f = ۵ - f$$

یا:

$$۵ - f = ۴/۳۶۷$$

$$f = ۰/۶۳۳$$

این امر بدان معنی است که در حالت عدم وجود فرصت‌های آربیتراژ، ارزش فعلی اختیار معامله می‌بایست ۰/۶۳۳ دلار باشد. اگر ارزش اختیار معامله از ۰/۶۳۳ بیشتر باشد، می‌بایستی ارزش بدرهٔ تشکیل شده، کمتر از ۴/۳۶۷ دلار هزینه در بر داشته باشد و همچنین بازده بیشتری از بازده بدون ریسک به ارمغان بیاورد. اگر ارزش اختیار معامله کمتر از ۰/۶۳۳ باشد، فروش استقراضی بدره، امکان وام‌گیری با نرخ پایین‌تر از بازده بدون ریسک فراهم می‌آورد.

حالت کلی

با استفاده از مثالی که در بالا مطرح شد، می‌توانیم در حالت کلی سهمی را در نظر بگیریم که قیمت آن در حال حاضر $S_۰$ و قیمت جاری اختیار معامله آن f می‌باشد. فرض می‌کنیم که طول عمر اختیار معامله تا زمان سررسید T باشد و در این فاصله زمانی، قیمت اولیه سهام از مقدار $S_۰$ افزایش پیدا کرده و به $S_۰u$ برسد. یا اینکه قیمت سهام تنزل یافته و به مقدار $S_۰d$ برسد. به طور کلی $u > ۱$ و $d < ۱$ است. هنگامی که حرکت قیمت سهام یک حرکت به سمت بالا (افزایش) باشد، $u - ۱$، درصد افزایش قیمت سهم را نشان می‌دهد

و هنگامی که حرکت قیمت، رو به پایین (کاهش) باشـــد، درصد کاهش قیمت سهم برابر با d – ۱ است. همچنین اگر قیمت سهام از S_0 به S_0u یک حرکت رو به بالا داشته باشد، فرض می‌کنیم عایدی (ارزش) اختیار معامله برابر f_u اســـت و اگر قیمت ســـهام از S_0 به S_0d یک حرکت رو به پایین داشته باشد، فرض می‌کنیم بازده اختیار معامله برابر f_d است. نمودار (۲–۱۰)، این مدل را به تصویر کشیده است.

حال به مثال قبلی بر می‌گردیم؛ در مثال مزبور بدره‌ای تشکیل دادیم که شامل اتخاذ «موقعیت خرید» سهام و «موقعیت فروش» یک اختیار خرید معامله بود. اگر فرض کنیم که قیمت سهام یک حرکت رو به بالا داشته باشد، ارزش بدرهٔ مذکور در پایان عمر اختیار معامله عبارت خواهد بود از:

$$S_0u\Delta - f_u$$

و اگر قیمت سهام یک حرکت رو به پایین داشته باشد، ارزش بدرهٔ تشکیل شده، در پایان عمر اختیار معامله عبارت خواهد بود از:

$$S_0d\Delta - f_d$$

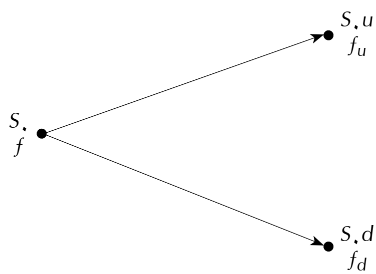
ارزش بدرهٔ مزبور در دو حالت فوق هنگامی یکسان خواهد بود که:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \qquad \text{رابطه (۱–۱۰)}$$

در نمونهٔ مورد بررســـی، بدرهٔ تشکیل شده، بدون ریسک است، و می‌باید نرخ بازده بدون

شکل ۲–۱۰: حالت کلی قیمت‌های سهام و اختیار در درخت دوجمله‌ای یک‌مرحله‌ای



ریسک را به ارمغان بیاورد. رابطه (۱–۱۰)، که نسبت تغییر در قیمت اختیار معامله به تغییر قیمت سهم در هر گره را نشان می‌دهد.

اگـر نرخ بازده بـدون ریسک را بـا r نشـان دهیـم، ارزش فعلـی پرتفولیـو برابـر اسـت بـا:

$$(S_{\circ}u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

هزینه ایجاد بدره هم برابر است با:

$$S_{\circ}\Delta - f$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$S_{\circ}\Delta - f = (S_{\circ}u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

یـا

$$f = S_{\circ}\Delta - (S_{\circ}u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

با جایگزینی طرف دوم معادله ۱–۱۰، و ساده کردن آن به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f = e^{-rT}\,[pf_u + (۱ - p)\,f_d] \qquad \text{رابطه (۲–۱۰)}$$

متغیر p در رابطه فوق را می‌توان از رابطه ۳–۱۰، محاسبه کرد.

$$P = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \qquad \text{رابطه (۳–۱۰)}$$

بدیـــن ترتیب می‌توانیم با اســـتفاده از روابـــط (۲–۱۰) و (۳–۱۰)، قیمت اختیار معامله را در یک مدل دو جمله‌ای ســـاده بدست آوریم. مجـدداً مثال ذکر شده را به خاطر بیاورید. شـــکل (۱–۱۰)، مثال را به صورت مدل درخت دوجمله‌ای برای شما به تصویـر کشیـده اسـت.

$$u = ۱/۱ \;،d = ۰/۹ \;،r = ۰/۱۲ \;،T = ۰/۲۵ \;،f_u = ۱ \;،f_d = ۰$$

ابتدا متغیر p را با استفاده از رابطه (۳–۱۰)، محاسبه می‌کنیم.

$$P = \frac{e^{۰/۱۲\times\frac{۳}{۱۲}} - ۰/۹}{۱/۱ - ۰/۹} = ۰/۶۵۲۳$$

و با جایگذاری در رابطه (۲–۱۰):

$$f = e^{-۰/۱۲\,\times\,۰/۲۵}\,(۰/۶۵۲۳ \times ۱ + ۰/۳۴۷۷ \times ۰) = ۰/۶۳۳$$

این مقدار برابر با همان مقدار بدست آمده در بخش قبلی است.

عدم ارتباط به بازده مورد انتظار سهام

شاید از اینکه ما احتمالات افزایش و یا کاهش قیمت سهام را در محاسبه قیمت اختیار معامله در رابطه (۲-۱۰)، دخالت نداده‌ایم، تعجب کنید. به عبارت واضح‌تر، اگر ما احتمال حرکت قیمت به سمت بالا (افزایش) را به جای ۰/۹ مثلاً ۰/۵ می‌گرفتیم، باز هم به همان قیمت اختیار معامله‌ای دست می‌یافتیم که در بالا آن را محاسبه کردیم و این باعث شگفتی است چرا که اصولاً می‌بایستی با افزایش میزان احتمال حرکت قیمت رو به بالا، قیمت اختیار خرید سهام مذکور افزایش و قیمت اختیار فروش سهام فوق کاهش یابد، اما این تصور ما به وقوع نمی‌پیوندد.

دلیل اصلی این موضوع آن است که ما اختیار معامله را در شرایط «مستقل» قیمت‌گذاری نمی‌کنیم. ما یک اختیار معامله را با توجه به قیمت سهام پایه آن قیمت‌گذاری می‌کنیم. در واقع احتمالات کاهش یا افزایش قیمت سهام قبلاً در قیمت سهام دخالت داده شده است؛ در نتیجه وقتی که ما می‌خواهیم اختیار معامله را با توجه به قیمت سهام آن قیمت‌گذاری نماییم، نیازی به دخالت دادن این احتمالات نیست.

۲-۱۰) ارزش‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک[۱]

گفتیم که برای محاسبه قیمت اختیار معامله، ضرورتی ندارد احتمال افزایش یا کاهش قیمت سهام را محاسبه کنیم، ولی در رابطه (۲-۱۰)، می‌توانیم متغیر p را احتمال افزایش در حرکت قیمت سهم و $1 - p$ را احتمال کاهش در حرکت قیمت سهم تفسیر کنیم؛ در این صورت، رابطه زیر بیانگر بازده مورد انتظار اختیار معامله خواهد بود.

$$pf_u + (1 - p) f_d$$

با این تفسیر از متغیر p، رابطه (۲-۱۰)، بیان می‌کند که ارزش جاری اختیار معامله، برابر با ارزش آتی مورد انتظار است که با نرخ بازده بدون ریسک تنزیل شده است.

اکنون می‌توانیم ـ با توجه به اینکه احتمال حرکت رو به بالای قیمت سهام با p نشان

۱) Risk-Neutral Valution

داده می‌شود- بازده مورد انتظار سهام را مورد ارزیابی قرار دهیم.

$$T \text{ قیمت مورد انتظار سهم در زمان } = E(S_T) = pS_0 u + (1-p)\, S_0 d$$

یا

$$E(S_T) = pS_0 (u-d) + S_0 d$$

با جایگذاری رابطه ۳-۱۰، داریم:

$$E(S_T) = S_0 e^{rT} \qquad \text{رابطه (۱۰-۴)}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که قیمت سهام با متوسط نرخ بدون ریسک رشد می‌کند. در واقع اینکه فرض کنیم متغیر p برابر با احتمال حرکت قیمت رو به بالاست، به مثابه این است که نرخ بازده سهم را معادل نرخ بازده بدون ریسک فرض کنیم.

در دنیایی که در آن سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک بی‌تفاوت‌اند، سرمایه‌گذاران بابت صرف ریسک چیزی مطالبه نمی‌کنند و نرخ بازده مورد انتظار همه اوراق بهادار، برابر با نرخ بهره بدون ریسک خواهد شد. رابطه (۴-۱۰)، نشان می‌دهد هنگامی که ما p را احتمال حرکت قیمت سهم رو به بالا فرض می‌کنیم، در واقع در دنیای بی‌تفاوتی به ریسک هستیم. رابطه (۲-۱۰)، نشان می‌دهد که ارزش اختیار معامله را می‌توان با تنزیل بازده مورد انتظار آن با نرخ بهره بدون ریسک، بدست آورد.

نتیجه فوق در واقع یکی از اصول کلی در قیمت‌گذاری اختیار معامله است که تحت عنوان «شرایط بی‌تفاوتی نسبت به ریسک» نامیده می‌شود. این اصل بیان می‌کند که ما هنگام قیمت‌گذاری اختیار معامله می‌توانیم فرض مصونیت کامل از ریسک را در نظر بگیریم. در عمل قیمت‌های محاسبه شده تحت شرایط «ریسک گریزی» در جهان واقعی نیز صادق است.

بررسی مجدد درخت دوجمله‌ای یک دوره‌ای

اکنون ما مجدداً به شکل (۱-۱۰)، بر می‌گردیم و نشان می‌دهیم که «ارزش‌گذاری تحت شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک» همان جوابی را به ما می‌دهد که در شرایط بدون آربیتراژ بدست می‌آوریم. در شکل (۱-۱۰)، قیمت جاری سهم ۲۰ دلار است و ممکن است در پایان سه ماه ۲۲ دلار یا ۱۸ دلار شود. اختیار معامله فوق را یک اختیار معامله

خریـد اروپایی فرض می‌کنیم که دارای قیمت اعمال ۲۱ دلار اسـت و در طول سـه ماه مهلت آن منقضی می‌شود. نرخ بهره بدون ریسک، سالیانه ۱۲٪ است.

گفتیم که p، احتمال حرکت رو به بالای قیمت در شرایط بی‌تفاوتی به ریسک است و از رابطه (۳ـ۱۰)، مقدار آن را محاسبه کردیم. همچنین بحث کردیم که ارزش مورد انتظار سهم در شرایط بی‌تفاوت به ریسک، می‌باید دارای بازدهی معادل نرخ بهره بدون ریسک ۱۲٪ باشد؛ به عبارت دیگر رابطه زیر باید صحیح باشد:

$$۲۲p + ۱۸\ (۱ - p) = ۲۰e^{۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}}$$

یـا

$$۴p = ۲۰e^{۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}} - ۱۸$$

که در نتیجه p می‌باید برابر با ۰/۶۵۲۳ باشد.

در پایان سـه ماه، اختیار خرید فوق ۰/۶۵۲۳ احتمال دارد که یک دلار ارزش داشته باشـد و ۰/۳۴۷۷ احتمال دارد که ارزش آن صفر شـود. لذا ارزش مورد انتظار آن عبارت است از:

$$۰/۶۵۲۳ \times ۱ + ۰/۳۴۷۷ \times ۰ = ۰/۶۵۲۳$$

در دنیای «ریسـک گریزی» این مبلغ می‌باید با نرخ بهره بدون ریسک تنزیل شود. ارزش جاری اختیار معامله عبارت است از:

$$۰/۶۵۲۳\,e^{-۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}} = ۰/۶۳۳ \text{ دلار}$$

و این همان مقداری است که قبلاً محاسبه کردیم. در نتیجه ارزش‌گذاری با فرض «شرایط بی‌تفاوت نسـبت به ریسـک» یا «عدم وجود فرصت آربیتراژ» جواب یکسـانی بدسـت می‌دهد.

دنیای واقعی در مقابل دنیای بی‌تفاوتی به ریسک

لازم اسـت تاکید کنیم که p، احتمال حرکت رو به بالای قیمت‌ها در شـرایط بی‌تفاوتی نسـبت به ریسک است. معمولاً این مقدار، معادل احتمال افزایش قیمت در دنیای واقعی نیسـت. در مثال ما، $p = ۰/۶۵۲۳$ بود. وقتی که می‌گوییم احتمال افزایش قیمت در دنیای بی‌تفاوتی به ریسـک ۰/۶۵۲۳ اسـت، بازده مورد انتظار سـهام نیز معادل نرخ بهره بدون

ریسک ۱۲٪ خواهد بود.

حال فرض کنید که در دنیای واقعی، بازده مورد انتظار سهم ۱۶٪ باشد و q مقدار احتمال افزایش قیمت سهام را نشان بدهد. بنابراین خواهیم داشت:

$$۲۲q + ۱۸\ (۱ - q) = ۲۰e^{۰/۱۶ \times \frac{۳}{۱۲}}$$

با حل معادلهٔ بالا مقدار $q =$۰/۷۰۴۱ خواهد بود.

بازده مورد انتظار اختیار معامله در دنیای واقعی هم معادل ۰/۷۰۴۱ خواهد بود.

$$q \times ۱ + (۱ - q) \times ۰$$

متأسفانه محاسبه نرخ تنزیل دقیق برای تنزیل بازده مورد انتظار در دنیای واقعی، زیاد آسان نیست. ریسک اتخاذ یک موقعیت خرید اختیار معامله، بیشتر از خرید خود دارایی است. در نتیجه، نرخ مناسب برای تنزیل بازده اختیار خرید، بیشتر از ۱۶٪ خواهد بود. بدون دانستن قیمت اختیار معامله، ما نمی‌توانیم محاسبه کنیم که نرخ تنزیل چقدر از ۱۶٪ بیشتر است.[۱] فرض وجود بی‌تفاوتی نسبت به ریسک، یک ابزار تسهیل کننده و مناسب جهت بدست آوردن قیمت اختیار معامله است؛ زیرا ما می‌دانیم که در شرایط بی‌تفاوتی نسبت به ریسک، بازده مورد انتظار همه دارایی‌ها، معادل نرخ بهره بدون ریسک است و بنابراین این نرخ برای تنزیل هرگونه بازده مورد انتظار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳–۱۰) درخت دوجمله‌ای دو دوره‌ای

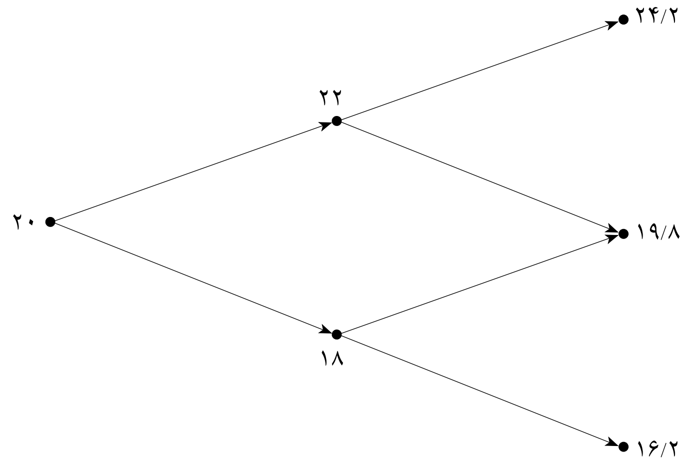
اکنون ما بحث خود را در مدل درخت دوجمله‌ای گسترش داده و مدل‌های درخت دوجمله‌ای دو مرحله‌ای را بررسی می‌کنیم. شکل (۳–۱۰)، این مدل دو دوره‌ای را برای شما به نمایش می‌گذارد. همانطور که در شکل فوق ملاحظه می‌کنید، قیمت سهم در ابتدا ۲۰ دلار است و در هر دورهٔ زمانی ۱۰٪ بالا یا ۱۰٪ پایین حرکت می‌کند. ما فرض می‌کنیم که طول هر دورهٔ زمانی سه ماه است و نرخ بهره بدون ریسک، سالیانه ۱۲٪ می‌باشد.

---

۱) با توجه به اینکه ارزش اختیار معامله ۰/۶۳۳ است، نرخ دقیق تنزیل معادل ۴۲/۵۸٪ است؛ چون داریم:

$$۰/۶۳۳ = ۰/۷۰۴۱e^{-۰/۴۲۵۸ \times \frac{۳}{۱۲}}$$

شکل ۳-۱۰: قیمت‌های سهام در درخت دو جمله‌ای دو مرحله‌ای



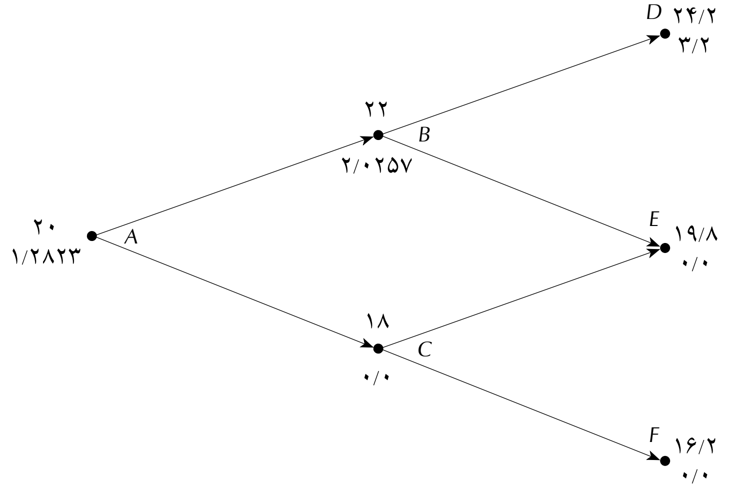
همچون مثال قبلی، قیمت انقضای سهم را ۲۱ دلار در نظر می‌گیریم.

هدف ما از تحلیل‌هایی که انجام می‌دهیم، محاسبه قیمت اعمال اختیار در اولین گره درخت می‌باشد. برای انجام این کار لازم است که در هر مرحلهٔ مدل، همان اصولی را که قبلاً بکار بردیم، اجرا کنیم. نمودار شکل (۴-۱۰)، شبیه نمودار شکل (۳-۱۰)، است با این تفاوت که در این نمودار قیمت سهم و قیمت اعمال در هر گره ذکر شده است (عدد بالایی، قیمت سهم و عدد پایین آن، قیمت اعمال اختیار می‌باشد.) قیمت‌های اعمال اختیار معامله در گره‌های پایانی، به آسانی قابل محاسبه است. این قیمت‌ها، در واقع نشان دهندهٔ بازده‌های اعمال اختیار معامله در هر گره است.

در گره D، قیمت سهم ۲۴/۲ و قیمت اختیار معامله ۳/۲ = ۲۱ - ۲۴/۲ است. در گره‌های E و F، اختیار معامله بدون ارزش و به عبارتی ارزش آن صفر است.

در گره C، قیمت اختیار معامله صفر است. چون گره C به گره‌های E و F منتهی می‌شود و در هر دو گره فوق قیمت اختیار معامله صفر است. برای اینکه بتوانیم قیمت اختیار معامله را در گره B محاسبه کنیم، بخشی از نمودار شکل (۴-۱۰)، را که در شکل (۵-۱۰)، به تصویر کشیده شده است، در نظر بگیرید. با توجه به شکل فوق اطلاعات

شـــکل ۴-۱۰: قیمت‌های ســـهام و اختیار معامله در درخت دو مرحله‌ای. در هر گره عدد بالا نشـــان دهندهٔ قیمت سهم وعدد پایین نشان دهنده قیمت اختیار است.



زیر را در اختیار داریم:

$$u = ۱/۱ \ \text{،} d = ۰/۹ \ \text{،} r = ۰/۱۲ \ \text{،} T = ۰/۲۵$$

با توجه به داده‌های فوق، می‌توانیم مقدار p را از رابطه (۳-۱۰)، محاسبه می‌کنیم که مقدار آن برابر p =۰/۶۵۲۳ می‌شـــود. با استفاده از رابطه (۲-۱۰)، می‌توانیم قیمت اعمال اختیار معامله را در گره B بدست آوریم.

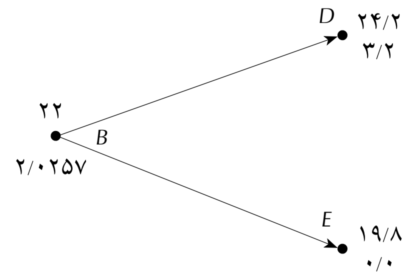
$$e^{-۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}} (۰/۶۵۲۳ \times ۳/۲ + ۰/۳۴۷۷ \times ۰) = ۲/۰۲۵۷$$

ما قیمت اختیار معامله را در گره‌های B و C محاسبه می‌کنیم. قیمت اختیار معامله در گره B معادل ۲/۰۲۵۷ و در گره C معادل صفر اســـت. برای محاســـبه ارزش معامله در گره A، با استفاده از رابطه (۲-۱۰)، داریم:

ارزش اختیار معامله در گروه A $= e^{-۰/۱۲ \times \frac{۳}{۱۲}} (۰/۶۵۲۳ \times ۲/۰۲۵۷ + ۰/۳۴۷۷ \times ۰) = ۱/۲۸۲۳$

توجه داشته باشید که در این مثال ما u و d (درصد افزایش و کاهش قیمت) را در هر گره یکســـان فرض کردیم. همچنین طول دورهٔ زمانی در هر مرحله را یکســـان فرض نمودیم. در نتیجه احتمال بی‌تفاوتی به ریسک p در تمام گره‌ها یکسان است.

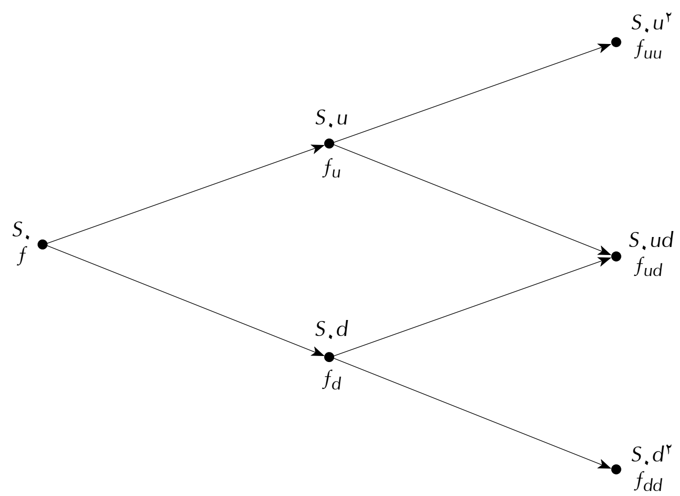
شکل ۵-۱۰: ارزیابی قیمت اختیار در گره B



حالت کلـی

اکنون ما می‌توانیم مثال فوق را با استفاده از نمودار شکل (۶-۱۰)، در حالت کلی بیان کنیم. قیمت اولیه سهم S_0 است. در هر مرحله زمانی ممکن است دو نوع قیمت سهم وجود داشته باشد؛ یعنی در صورت افزایش قیمت در u و در صورت کاهش قیمت در d ضرب می‌شود؛ به عنوان مثال، در مرحله اول، احتمال وجود دو قیمت سهم یعنی «Sd» و «Su» و در مرحله بعد از آن، سه قیمت محتمل الوقوع یعنی S_0u^2، S_0ud و Sd^2 وجود

شکل ۶-۱۰: حالت کلی قیمت‌های سهام و اختیار در درخت دوجمله‌ای دو مرحله‌ای



دارد. همچنین قیمت‌های اختیار معامله در هر گره مشـــخص شــده است؛ برای مثال، پس از دو حرکــت رو به بالا، ارزش اختیار معامله به صورت f_{uu} نمایش داده می‌شــود. برای نشــان دادن نرخ بهرهٔ بدون ریســک از r و هر فاصله زمانی بین دو گره را با δt سال نشان می‌دهیم.

با استفاده از معادله (۲–۱۰)، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$f_u = e^{-r\delta t}\,[pf_{uu} + (1-p)\,f_{ud}] \qquad \text{رابطه } (۱۰–۵)$$

$$f_d = e^{-r\delta t}\,[pf_{ud} + (1-p)\,f_{dd}] \qquad \text{رابطه } (۱۰–۶)$$

$$f = e^{-r\delta t}\,[pf_u + (1-p)\,f_d] \qquad \text{رابطه } (۱۰–۷)$$

با جایگذاری روابط (۵–۱۰) و (۶–۱۰) در رابطه (۷–۱۰)، داریم:

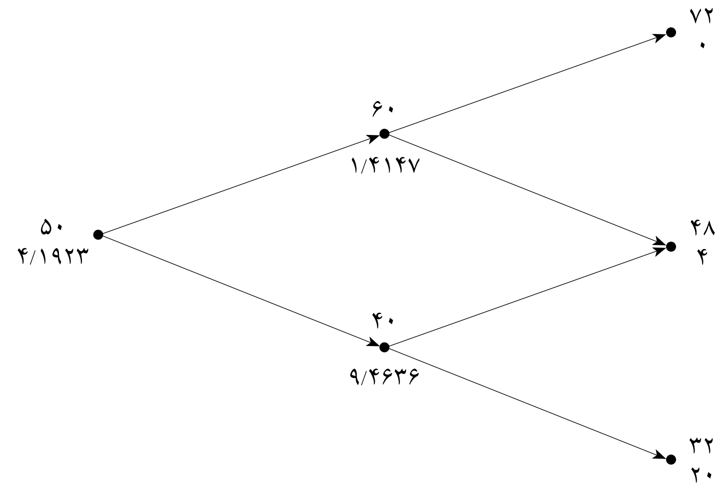
$$f = e^{-2r\delta t}\,[p^2 f_{uu} + 2p\,(1-p)\,f_{ud} + (1-p)^2\,f_{dd}]$$

این امر با اصل ارزش‌گذاری بی‌تفاوت به ریسک که قبلاً اشاره شد، همخوانی دارد. متغیرهای p^2، $2p\,(1-p)$ و $(1-p)^2$ احتمالات افزایش، تســاوی و کاهش قیمت است که در گره پایانی حاصل شــده است. قیمت اختیار معامله برابر با تنزیل بازده مورد انتظار با نرخ بهره بدون ریســک است. با اضافه کردن مراحل بیشتر به مدل درخت دوجمله‌ای، تغییری در اصل ارزش‌گذاری بی‌تفاوت به ریسک حاصل نمی‌شود و قیمت اختیار معامله همیشه مساوی است با ارزش مورد انتظار تنزیل شده با نرخ r.

۴–۱۰) مثالی در مورد اختیار فروش

مکانیسم تعیین قیمت که در این فصل توضیح دادیم را می‌توان برای قیمت‌گذاری هر نوع مشــتقاتی اســتفاده کرد، با این شرط که قیمت این مشتقــات بستگــی بــه قیمــت سهامــی داشــته باشــد که تغییرات قیمت ســهم مذکور به صورت دوجمله‌ای باشــد. یک اختیار فــروش اروپایی با قیمت اعمال ۵۲ دلار بر روی سهمی که قیمت‌جاری آن ۵۰ دلار است را در نظر بگیرید. ما فرض می‌کنیم دو مرحله زمانــی در فاصله یک ســال وجود داشــتــه باشــد و در هر فاصله زمانی، حرکت قیمت ســهم ۲۰٪ بالا یا ۲۰٪ پایین است. نرخ بهره بدون ریســک را هم ۵٪ در نظر می‌گیریــم. درخــت دوجملــه‌ای مــدل فــوق در شــکل (۱–۷)، بــه تصویــر کشــیــده شــده اســت. احتمــال بی‌تفاوتــی بــه ریســک (p) عبــارت

شکل ۷–۱۰: استفاده از درخت دو جمله‌ای برای ارزشگذاری اختیار فروش اروپایی. در هر گره عدد بالایی بیانگر قیمت سهم و عدد پایینی نشان دهندهٔ قیمت اختیار است.



اســت از:

$$P = \frac{e^{۰/۰۵ \times ۱} - ۰/۸}{۱/۲ - ۰/۸} = ۰/۶۲۸۲$$

در گره‌های پایانی، ســه نوع قیمت محتمل الوقوع ۷۲، ۴۸ و ۳۲ دلار وجود دارد. در این مثال $f_{uu} = ۰$، $f_{ud} = ۴$ و $f_{dd} = ۲۰$ است. با استفاده از رابطه (۸–۱۰) داریم:

$$f = e^{-۲ \times ۰/۰۵ \times ۱}\,(۰/۶۲۸۲^{۲} \times ۰ + ۲ \times ۰/۶۲۸۲ \times ۰/۳۷۱۸ \times ۴ + ۰/۳۷۱۸^{۲} \times ۲۰) = ۴/۱۹۲۳$$

یعنی ارزش اختیار فروش فوق ۴/۱۹۲۳ دلار است. این نتیجه را می‌توان با بکار بردن رابطه (۲–۱۰)، نیز بدســت آورد. منتها در صورت اســتفاده از رابطه (۲–۱۰)، باید یک حرکت عقب گردی در هر گره انجام دهیم. شکل (۷–۱۰)، قیمت‌های اختیار معامله در دوره‌های وسط را نشان می‌دهد.

۵–۱۰) اختیار معاملات آمریکایی

در مباحث پیشــین، تمامی اختیار معامله‌هایی که مــورد بحث قرار گرفت، همگی از نوع اروپایــی بود. اکنــون می‌خواهیم چگونگی قیمت‌گذاری اختیــار معاملات آمریکایی را با

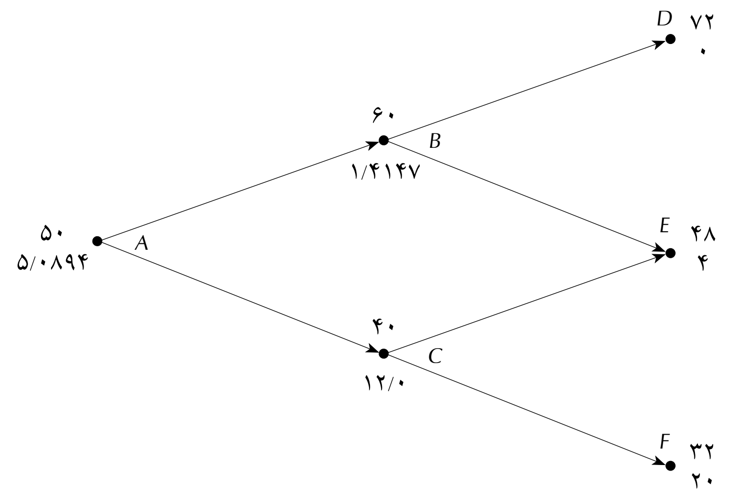
استفاده از مدل درخت دوجمله‌ای مورد بحث قرار دهیم. قیمت‌گذاری اختیار معاملات از نوع آمریکایی با شروع کار در زمان T (انتهای درخت)، آغاز و با حرکت به سمت عقب ادامه پیدا می‌کند. لازم است که در هر گره بررسی کنیم که آیا اعمال زودتر از موعد اختیار معامله، بر نگهداری آن طی مدت زمان بیشتر ارجحیت دارد یا خیر؟ ارزش اختیار معامله در گره‌های پایانی در هر نوع اختیار معامله آمریکایی و اروپایی یکسان است. ارزش اختیار معامله‌های واقع در گره‌های ماقبل آخر، بیشترین مقدار یکی از دو مقدار زیر است:

۱. ارزش محاسبه شده با استفاده از رابطه (۲-۱۰)

۲. بازده ناشی از اعمال زودتر از موعد

شکل (۸-۱۰)، نشان می‌دهد که اگر اختیار معامله از نوع آمریکایی باشد، چه تغییری در نمودار (۷-۱۰)، رخ می‌دهد. همانطور که در نمودار (۸-۱۰)، می‌بینید، در مقادیر قیمت‌های سهم و احتمال هر یک از آنها تغییری مشاهده نمی‌شود و در هر دو نوع اختیار معامله یکسان است. همچنین همانطور که گفتیم، ارزش اختیار معامله در گره‌های پایانی هر دو نوع اختیار معامله یکسان است. در گره B، قیمت اختیار معامله با استفاده

شکل ۸-۱۰: استفاده از درخت دو مرحله برای ارزیابی اختیار فروش آمریکایی. در هر گره عدد بالایی بیانگر قیمت سهم و عدد پایینی نشان دهندهٔ قیمت اختیار است.



از رابطه (۲−۱۰)، ۱/۴۱۴۷ محاسبه شده است. در این گره، اعمال زودتر از موعد اختیار معامله، باعث یک بازده منفی (۸−) می‌شود. پس کاملاً واضح است که نگهداری اختیار معامله بر اعمال زودتر از موعد آن مرجح است؛ بنابراین، قیمت صحیح اختیار معامله در گره B، برابر با ۱/۴۱۴۷ دلار می‌باشد. در گروه C وضعیت متفاوتی برقرار است. قیمت اختیار معامله در این گره با استفاده از رابطه (۲−۱۰)، ۹/۴۶۳۶ دلار تعیین شده است، در صورتی که، با اعمال اختیار معامله، قیمت آن برابر با ۱۲ = ۴۰ − ۵۲ دلار خواهد شد؛ لذا در صورتی که به گره C برویم، لازم خواهد شد تا اختیار معامله را اعمال نماییم. در این حالت قیمت صحیح اختیار معامله برابر با ۱۲ دلار خواهد شد. به همین طریق، قیمت اختیار معامله را در گره A با استفاده از رابطه (۲−۱۰) محاسبه می‌کنیم.

$$f = e^{-۰/۰۵ \times ۱} (۰/۶۲۸۲ \times ۱/۴۱۴۷ + ۰/۳۷۱۸ \times ۱۲) = ۵/۰۸۹۴$$

در صورت اعمال اختیار معامله مزبور، ارزش آن به ۲ = ۵۰ − ۵۲ دلار می‌رسد؛ بنابراین در این گره نباید اختیار معامله موردنظر را اعمال نمود. قیمت صحیح اختیار معامله در این گره برابر با ۵/۰۸۹۴ دلار می‌گردد. جزئیات بیشتر در مورد مدل درخت دوجمله‌ای در فصل ۱۷ آورده شده است.

۶−۱۰) دلتا

در این قسمت در مورد یک فاکتور مهم در قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله بنام دلتا بحث می‌کنیم. دلتای یک اختیار معامله عبارت است از نسبت تغییرات قیمت اختیار معامله سهام، به تغییر قیمت سهام پایه آن؛ به عبارت دیگر، این نسبت نشان دهندهٔ تعداد سهامی است که باید به‌ازای هر اختیار معامله فروخته شده، نگه داریم تا پوشش خطر بدون ریسک ایجاد کنیم. (بهرهٔ بدون ریسک) این نسبت شبیه Δ است که در اوایل فصل معرفی کردیم. عمل ایجاد بدرهٔ بدون ریسک را پوشش خطر دلتا[۱] گویند. دلتای اختیار معامله خرید مثبت و دلتای اختیار معامله فروش، منفی است.

با توجه به شکل (۱−۱۰)، می‌توانیم ارزش دلتای اختیار فروش مذکور را محاسبه

۱) Delta hedging

کنیـم:

$$\Delta = \frac{۱ - ۰}{۲۲ - ۱۸} = ۰/۲۵$$

یعنی $۰/۲۵ = \Delta$ اســت. دلیل آن این اســت که وقتی قیمت سهم بین ۱۸ و ۲۲ دلار تغییر می‌کند، قیمت اختیار معامله از صفر تا یک دلار تغییر می‌کند.

در شــکل (۴–۱۰)، مقدار دلتا برای دورهٔ زمانی اول با توجه به تغییر قیمت‌ها برابر است بـا:

$$\frac{۲/۰۲۵۷ - ۰}{۲۲ - ۱۸} = ۰/۵۰۶۴$$

مقدار دلتا در دورهٔ زمانی دوم با توجه به تغییرات قیمت سهم برابر است با:

الف) اگر یک حرکت رو به بالا در طول دورهٔ زمانی اول وجود داشــته باشــد (در دورهٔ زمانی اول با افزایش قیمت مواجه باشیم) در این حالت داریم:

$$\frac{۳/۲ - ۰}{۲۴/۲ - ۱۹/۸} = ۰/۷۲۷۳$$

ب) اگر یک حرکت رو به پایین در طول دوره زمانی اول وجود داشته باشد، مقدار دلتا برابر خواهد بود با:

$$\frac{۰ - ۰}{۱۹/۸ - ۱۶/۲} = ۰$$

به همین ترتیب در شکل (۷–۱۰) داریم:

$$\Delta = \frac{۱/۴۱۴۷ - ۹/۴۶۳۶}{۶۰ - ۴۰} = -۰/۴۰۲۴$$

و در پایان دورهٔ زمانی دوم، مقدار دلتا برابر با یکی از مقادیر زیر خواهد بود:

$$\frac{۰ - ۴}{۷۲ - ۴۸} = -۰/۱۶۶۷$$

یـا

$$\frac{۴ - ۲۰}{۴۸ - ۳۲} = -۱$$

مثال درخت دوجمله‌ای فوق نشان می‌دهد که دلتا در طول زمان تغییر می‌کند.

در شکل (۴–۱۰)، دلتا از ۰/۵۰۶۴ به یکی از دو مقدار صفر یا ۰/۷۲۷۳ تغییر می‌کند. در شــکل (۷–۱۰) نیز از ۰/۴۰۲۴– تا ۰/۱۶۶۷– یــا ۱– تغییر می‌کند؛ بنابراین برای حفظ

پوشـــش ریســـک با استفاده از تشکیل بدرهٔ ســـهم و اختیار معاملهٔ آن لازم خواهد بود که به موازات تغییرات دلتا، نســـبت (درصد) سهام نگهداری شده در سبد بدرهٔ خود را تغییر دهیم. این ویژگی اختیار معامله را در فصول ۱۱ و ۱۵ بررسی خواهیم کرد.

۷-۱۰) مدل درخت دوجمله‌ای در عمل

مدل‌های درخت دوجمله‌ای که در بالا بدان‌ها اشـــاره شـــد، مدل دوجمله‌ای یک دوره‌ای بودند. در مدل‌های فوق، فرض بر این بود که ســـهام در پایان عمر اختیار معامله، فقط دو قیمت می‌تواند به خود بگیرد. البته مدل مزبور مدلی غیرواقعی بوده و فقط جهت برآورد تقریبی قیمت اختیار معامله مورد استفاده قرار گرفت. در عمل، هنگام استفاده از مدل‌های مزبور، فرض می‌شود، حرکت‌های قیمت سهام در فاصله زمانی کوتاه مدت به صورت دو شاخه‌ای است. معمولاً طول عمر اختیار معامله مورد بحث را به ۳۰ یا تعداد زیادی فاصله زمانی کوتاه مدت تقسیم می‌کنند. در هر دورهٔ زمانی یک حرکت قیمت سهام دوجمله‌ای وجود دارد. با تقســـیم طول عمر یک اختیار معامله به ۳۰ فاصله زمانی، ۳۱ قیمت نهایی سهم و $۲^{۳۰}$ یا حدود یک میلیون مسیر احتمالی قیمت سهم وجود خواهد داشت.

ارزش فاکتورهای u و d با توجه به تغییرپذیری قیمت ســـهام (σ) تعیین می‌شود. با توجه به روش محاسبه کاکس، راس و رابینستین داریم:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \quad \text{و} \quad d = \frac{۱}{u}$$

با استفاده از معادلات قبلی می‌توان نشان داد که:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \; d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$P = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}$$

در فصل ۱۷، این مبحث را با جزئیات بیشتر پی می‌گیریم.

۸-۱۰) خلاصـــه

در این فصل به بحث «ارزش‌گذاری اختیار معامله» اشـــاره کردیم. اگر حرکت‌های قیمت سهام در طول عمر اختیار معامله، از درخت دوجمله‌ای یک دوره‌ای تبعیت کند، می‌توان یک بدرهٔ بدون ریســـک متشـــکل از ســـهام و اختیار معامله ایجاد نمـــود. در دنیای بدون

فرصت‌هــای آربیتراژی، بدره‌های بدون ریســک می‌باید بازدهی برابــر با نرخ بهره بدون ریســک داشــته باشــد. با توجه به این نکته می‌توان اختیار معاملات را با توجه به ســهام پایه آنها قیمت‌گذاری کرد. لازم به یادآوری اســت که لازم نیســت در هر گره از درخت دوجمله‌ای، احتمالات حرکت قیمت سهم به سمت بالا یا رو به پایین را بدانیم.

هنگامــی که حرکت‌های قیمت ســهم به صورت درخت دوجملــه‌ای چند دوره‌ای باشــد، قیمت‌گــذاری اختیار معامله با شــروع کار در زمان T (انتهــای درخت) آغاز و با حرکت به سمت عقب ادامه پیدا می‌کند. قیمت اختیار معامله را در هر گره به طور مستقل محاســبه می‌کنیم و در نهایــت قیمت اختیار معامله را در گره ابتدایی بدســت می‌آوریم. همچنین در هر گره از حرکت قیمت سهم رو به بالا یا رو به پایین، تنها شرط «عدم وجود آربیتراژ» برقرار است و لازم نیست احتمال افزایش یا کاهش قیمت سهم را بدانیم.

رویکرد دیگری برای اندازه‌گیری اختیار معامله سهام وجود دارد که به «ارزش‌گذاری بی‌تفاوت نسبت به ریسک» معروف است. این اصل بیان می‌کند که در هنگام ارزش‌گذاری اختیار معامله با توجه به سهام پایه آن، می‌توان شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک را فرض کرد. در این فصل ما از طریق مثال و فرمول نشان دادیم که پاسخ‌های بدست آمده (قیمت) در شــرایط بی‌تفاوت نســبت به ریسک با پاسخ‌های بدســت آمده در شرایط عدم وجود آربیتراژ مشابه می‌باشد.

دلتای یک ســهم (Δ) تأثیر تغییر قیمت دارایــی پایه را بر روی قیمت اختیار معامله نشــان می‌دهد؛ به عبارت دیگر، مقدار دلتا، معادل نســبت تغییــرات قیمت اختیار معامله به تغییرات قیمت ســهام پایه اســت. برای ایجاد یک موضع معاملاتی بدون ریسک، یک ســرمایه‌گذار می‌باید به ازای هر اختیار معامله فروخته شــده، Δ سهم بخرد. بررسی یک درخت دوجمله‌ای در حالت کلی نشــان می‌دهد کــه Δ در طول عمر اختیار معامله تغییر می‌کند. این موضوع بدین معنی اســت که برای پوشش خطر موقعیت اختیار معامله، لازم است با توجه به تغییر دلتا، درصد (نسبت) سهام پایه نگهداری شده را تغییر دهیم.

در فصــل بعدی، رویکرد تحلیلی بلک و شــولز برای قیمت‌گــذاری اختیار معامله سهام را بررسی می‌کنیم. در فصول ۱۲ و ۱۳، انواع دیگر اختیار معامله را بررسی می‌کنیم.

در فصل ۱۵، رویه‌های ریاضی مورد اســتفاده جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله و دلتا را بررسی می‌کنیم و نهایتاً در فصل ۱۷، مجدداً به بحث درخت‌های دوجمله‌ای بر می‌گردیم و بحث مبسوطی در مورد نحوهٔ اجرای آنها ارائه می‌دهیم.

سؤال

۱. قیمت سهمی در حال حاضر ۴۰ دلار است. می‌دانیم که در پایان یک ماه بعد، قیمت سهم مزبور ۴۲ یا ۳۸ دلار خواهد بود. نرخ بهره بدون ریسک سالیانه ۸٪ به صورت مرکب پیوسته است. ارزش اختیار خرید اروپایی یک ماهه با قیمت توافقی ۳۹ دلار را محاسبه نمایید.

۲. رویکردهای ارزش‌گذاری «تحت شرایط بی‌تفاوت به ریسک» و «عدم وجود فرصت‌های آربیتراژی» برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با استفاده از درخت دوجمله‌ای یک مرحله‌ای تشریح نمایید.

۳. مفهوم دلتای اختیار معامله چیست؟

۴. قیمت سهمی در حال حاضر ۵۰ دلار است . می‌دانیم که پس از ۶ ماه ، قیمت سهم مزبور به ۴۵ یا ۵۵ دلار می‌رسد. نرخ بهره بدون ریسک به صورت مرکب پیوسته سالیانه ۱۰٪ است. ارزش اختیار فروش اروپایی شش ماهه با قیمت توافقی ۵۰ دلار را محاسبه نمایید.

۵. قیمت سهمی در حال حاضر ۱۰۰ دلار است. در طی دو دوره شش ماهه بعدی انتظار می‌رود که قیمت سهام با ۱۰٪ افزایش یا ۱۰٪ کاهش مواجه باشد. نرخ بهره بدون ریسک به صورت مرکب پیوسته ۸٪ در سال است. ارزش اختیار خرید اروپایی یک ساله با قیمت توافقی ۱۰۰ دلار را محاسبه نمایید.

۶. با توجه به شرایط ذکر شده در مسأله قبلی، ارزش اختیار فروش اروپایی یک ساله با قیمت توافقی ۱۰۰ دلار را محاسبه نمایید. رابطه برابری اختیار فروش ـ خرید را آزمون نمایید.

۷. فرض کنید تغییرات قیمت سهام در طول عمر یک اختیار اروپایی بوسیله یک درخت دوجمله‌ای ترسیم شده باشد. توضیح دهید چرا با اتخاذ موضع معاملاتی در سهام و اختیار معامله نمی‌توان برای کل عمر اختیار معامله به صورت بدون ریسک باقی ماند؟